35　種々の量の計算

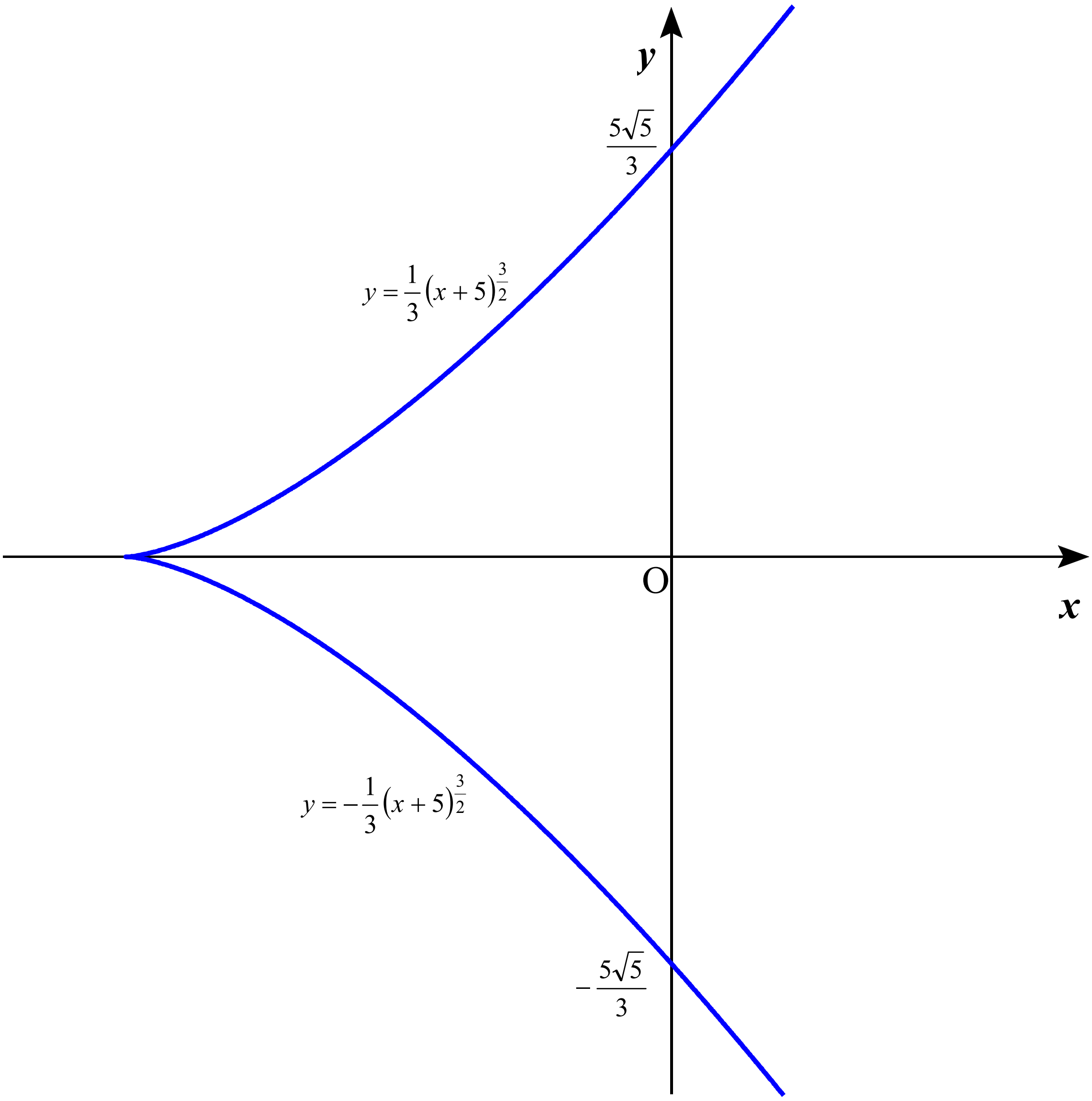
基本問題 **&** 解法のポイント

58

(1)

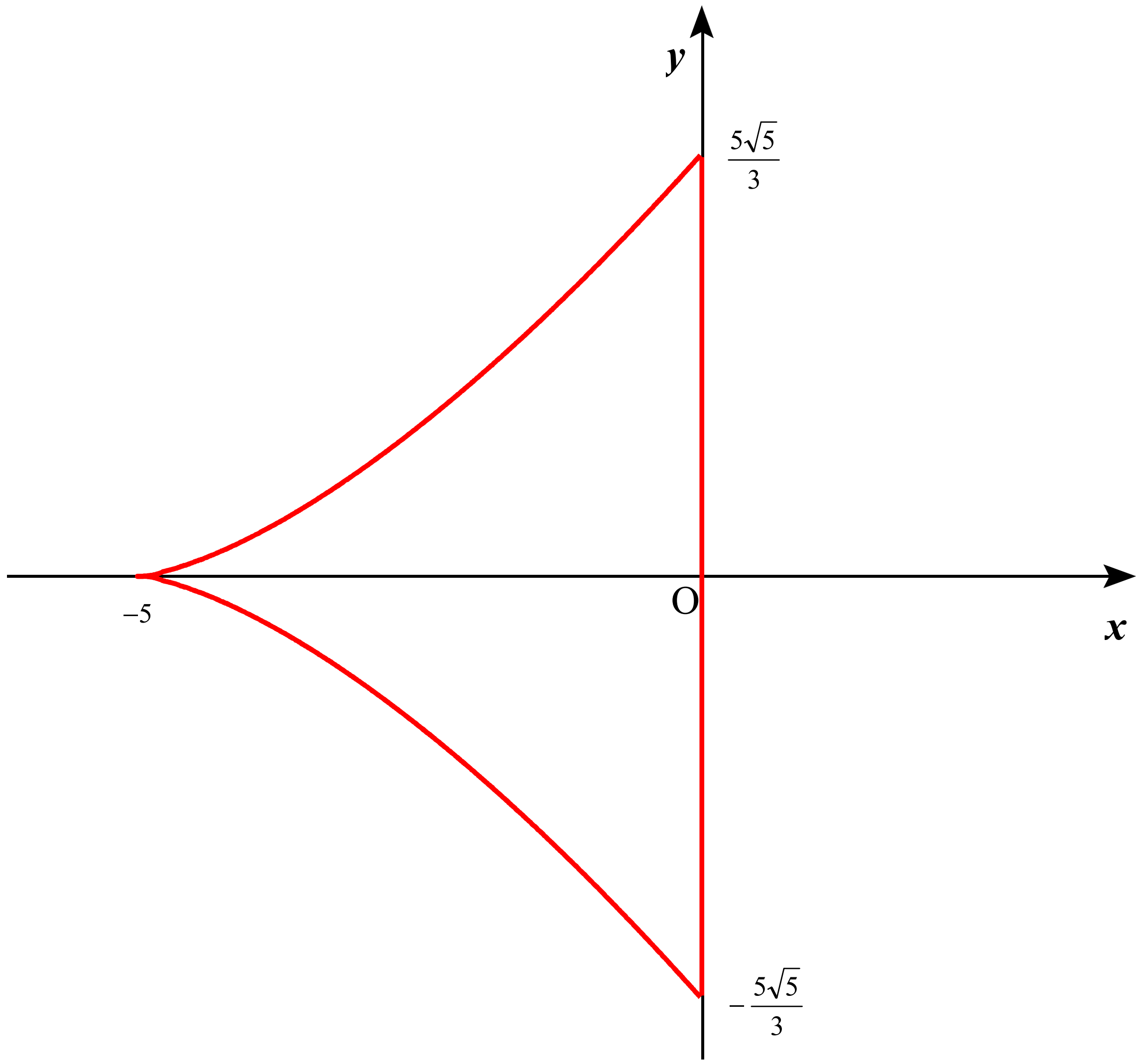
$y^2=\frac{1}{9}(x+5)^3\geq 0$ より，$y=\pm\frac{1}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}$ （$x\geq -5$）

よって，グラフは下図のようになる。



よって，下図赤色実線の長さを求めればよい。
赤色実線は x 軸に関して対称だから，$y \geq 0$ の部分の長さを 2 倍すればよい。
よって，求める長さは

$$
\begin{aligned}
2\left(\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx+\frac{5\sqrt{5}}{3}\right) &= 2\left(\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}\right)\right)^2}\,dx+\frac{5\sqrt{5}}{3}\right) \\
&= 2\left(\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(x+5)}\,dx+\frac{5\sqrt{5}}{3}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\int_{-5}^{0}(x+9)^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{5\sqrt{5}}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left[(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-5}^{0}+\frac{10\sqrt{5}}{3} \\
&= \frac{38+10\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$



(2)

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=4\left(2-\sqrt{3}\right)$$

59

速さ $|v|=\left|e^t\sin t\right|$ より,

$$\int_0^{2\pi}|v|dt=\int_0^{2\pi}\left|e^t\sin t\right|dt$$

$$=\int_0^{\pi}e^t\sin t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}e^t\sin t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}e^t\sin t\,dt+\int_{2\pi}^{\pi}e^t\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^t(\sin t-\cos t)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\left[e^t(\sin t-\cos t)\right]_{2\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2\pi}+2e^{\pi}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)^2$$

補足

$$\left(e^t\sin t\right)'=e^t\sin t+e^t\cos t$$

$$\left(e^t\cos t\right)'=-e^t\sin t+e^t\cos t$$

より, $\frac{1}{2}\left\{\left(e^t\sin t\right)'-\left(e^t\cos t\right)'\right\}=e^t\sin t\quad\therefore\int e^t\sin t\,dt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$

A

208

(1)

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{\sin x}\right|dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log(1-\cos x)-\log(1+\cos x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log 3$$

(2)

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=5$ より，$(e^x)^2-10e^x+1=0$　$\therefore e^x=5\pm 2\sqrt{6}$

これと $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ は $x\leq 0$ で単調減少，$0\leq x$ で単調増加することから，

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\leq 5$ の解は $\log(5-2\sqrt{6})\leq x\leq\log(5+2\sqrt{6})$

よって，

$$\int_{\log(5-2\sqrt{6})}^{\log(5+2\sqrt{6})}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_{\log(5-2\sqrt{6})}^{\log(5+2\sqrt{6})}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$

$$= \int_{\log\left(5-2\sqrt{6}\right)}^{\log\left(5+2\sqrt{6}\right)} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{\log\left(5-2\sqrt{6}\right)}^{\log\left(5+2\sqrt{6}\right)} \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\log\left(5-2\sqrt{6}\right)}^{\log\left(5+2\sqrt{6}\right)} \left(e^x + e^{-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_{\log\left(5-2\sqrt{6}\right)}^{\log\left(5+2\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{5 + 2\sqrt{6} - \frac{1}{5+2\sqrt{6}} - \left(5 - 2\sqrt{6} - \frac{1}{5-2\sqrt{6}}\right)\right\}$$

$$= 4\sqrt{6}$$

209

(1)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(e^t \cos t\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(e^t \sin t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t\left(\cos t - \sin t\right) \\ e^t\left(\cos t + \sin t\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left\{e^t\left(\cos t - \sin t\right)\right\} \\ \dfrac{d}{dt}\left\{e^t\left(\cos t + \sin t\right)\right\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^t \sin t \\ 2e^t \cos t \end{pmatrix}$$

(2)

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a} = 0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = e^t \neq 0$, $\left|\vec{a}\right| = 2e^t \neq 0$ より， $\cos\theta_2 = 0$ $\therefore \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$

(3)

$$L = \int_0^T \left|\vec{v}\right| dt = \int_0^T \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^T = \sqrt{2}\left(e^T - 1\right)$$

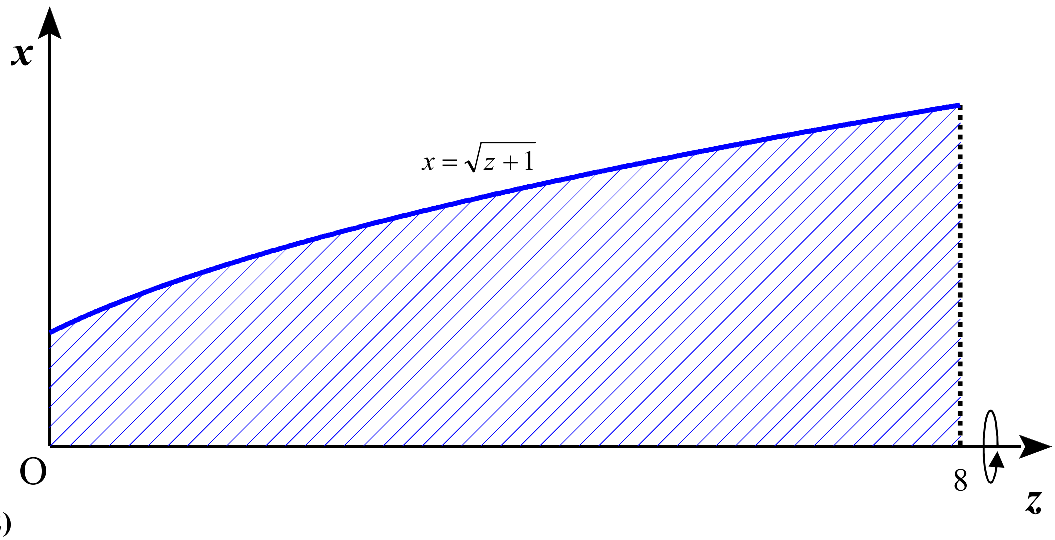
210

(1)

容器の体積をVとすると，$dV=\pi x^2dz$より，

$$V=\pi\int_0^8 x^2dz$$
$$=\pi\int_0^8(z+1)dz$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}z^2+z\right]_0^8$$
$$=40\pi$$

よって，求める時間$\dfrac{V}{\pi}=40$秒



(2)

水面の高さをh，体積をvとすると，(1)より，$v=\pi\left[\dfrac{1}{2}z^2+z\right]_0^h=\pi\left(\dfrac{1}{2}h^2+h\right)$

また，体積がvになるまでの時間をtとすると，$v=\pi t$

よって，$\pi\left(\dfrac{1}{2}h^2+h\right)=\pi t$　すなわち$t=\dfrac{1}{2}h^2+h$　・・・①

水面が上昇する速度は$\dfrac{dh}{dt}$で与えられるから，

$t=\dfrac{1}{2}h^2+h$の両辺をtで微分することにより，$\dfrac{dh}{dt}$を求めると，

$$1=\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{2}h^2+h\right)\cdot\frac{dh}{dt}$$
$$=(h+1)\frac{dh}{dt}$$

$\therefore \dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{h+1}$　・・・②

また，半径をrとすると，$z=x^2-1\ (1\le x\le 3)$より，$h=r^2-1$　・・・③

よって，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{d(r^2-1)}{dt}=\dfrac{d(r^2-1)}{dr}\dfrac{dr}{dt}=2r\dfrac{dr}{dt}$

これと②より，半径が増大する速度は$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{2r(h+1)}$　・・・④

$t=4$を①に代入し，整理すると，$h^2+2h-8=0$
よって，$(h-2)(h+4)=0,\ h>0$より，$h=2$　・・・⑤

⑤を②に代入することにより，水面が上昇する速度は$\dfrac{1}{3}$

⑤を③に代入すると，$2=r^2-1$　$\therefore r=\sqrt{3}$　・・・⑥

⑤，⑥を④に代入することにより，半径が増大する速度は$\dfrac{1}{6\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

以上より，

水面が上昇する速さは$\dfrac{1}{3}$

半径が増大する速さは$\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

B

211

(1)

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)

xy 直交座標の原点と x 軸をそれぞれ極座標の極と始線に一致させると，

$(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

これと $r=\theta$ より，$(x,\ y)=(\theta\cos\theta,\ \theta\sin\theta)$

曲線の微小部分の長さを dl とすると，

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\sqrt{\left(\frac{d}{d\theta}(\theta\cos\theta)\right)^2+\left(\frac{d}{d\theta}(\theta\sin\theta)\right)^2}\,d\theta$$
$$=\sqrt{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

よって，求める長さは $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$ で与えられ，

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\left[\log\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta+\log\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)$$

より，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)}{2}$

212

(1)

円 C の中心を C とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}$

点 $(4,\ 0)$ を Q, 円 C と円 E の接点を R とすると点 Q から時計回り方向の弧 QR の長さ $=4\theta$

この長さは点 Q から反時計回り方向の弧 RP の長さと等しい。これと円 C の半径が 1 であることから，P は C を中心に R から -4θ 回転した位置にある。これと CR と x 軸正方向のなす角が θ であることから，CP が x 軸正方向となす角は $\theta+(-4\theta)=-3\theta$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix}\cos(-3\theta)\\\sin(-3\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos 3\theta\\-\sin 3\theta\end{pmatrix}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$=\begin{pmatrix}3\cos\theta+\cos 3\theta\\3\sin\theta-\sin 3\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに，点 P の座標は $(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

(2)

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2p}\sqrt{(-3\sin\theta-3\sin 3\theta)^2+(3\cos\theta-3\cos 3\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\{(\sin\theta+\sin 3\theta)^2+(\cos\theta-\cos 3\theta)^2\}}\,d\theta$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2(\cos\theta\cos 3\theta-\sin\theta\sin 3\theta)}\,d\theta$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 4\theta}\,d\theta$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos 4\theta)}\,d\theta$$
$$=3\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 2\theta}\,d\theta$$
$$=6\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta$$
$$=6\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=24\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=24$$

参考図

　赤色実線は点 P の軌跡